

الأبجد 30 / 5 / 2018

التمرين الأول:

1. لتكن معادلة التفاضلية:

$$(3x + 2x^2) y'' = 6(1+x) y' + 6y = 6$$

أوجد الخلل العام للمعادلة التفاضلية إذا علمت أن:

$$y_1 = 1 \quad \text{و} \quad y_2 = x+2 \quad \text{حليتان خاصيتان}$$

اعتماداً على الملاحظة من المعادلة الخاصة نجد:

أن فرق أي حلين خاصين لغير المتجانسة هو حل للمعادلة المتجانسة

المعادلة أي الخلل العام يعطى بالصيغة

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)v$$

أي $y = 1 + (x+1)v$ نضع مرتين متتاليتين فنجد أن:

$$y' = (x+1)v' + v \quad y'' = 2v' + (x+1)v''$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أن:

$$(3x + 2x^2)(x+1)v'' + 2(3x + 2x^2)v' - 6(x+1)^2v' - 6(1+x)v + 6 + 6(x+1)v = 6$$

$$(3x + 2x^2)(x+1)v'' + (2x^2 - 6x - 6)v' = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى بالنسبة لـ v'

$$u'' = u' \Leftrightarrow v' = u$$

$$x(3+2x)(x+1)u' - 2(x^2+3x+3)u = 0$$

$$\frac{u'}{u} = 2 \cdot \frac{x^2+3x+3}{x(x+1)(2x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{2x+3}$$

$$A=1 \quad B=-1 \quad C=1$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+3}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{u}{e} = \ln |x| - \ln |x+1| + \frac{1}{2} \ln |2x+3|$$

$$\Rightarrow \ln \frac{u}{e} = \ln \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{u}{e} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

$$u = c_1 \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

$$u = v'$$

$$\Rightarrow v = c_1 \int \frac{2x^3+3x^2}{x^2+2x+1} dx + c_2$$

نقسم البسط على المقام
 $(2x-1) + \frac{1}{x^2+2x+1}$

$$v = c_1 (x^2 - x) - c_1 \frac{1}{x+1} + c_2$$

ومن هنا فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = 1 + (x+1) \left[c_1 (x^2 - x) - c_1 \frac{1}{x+1} + c_2 \right]$$

$$y = 1 + c_2 (x+1) + c_1 (x^3 - x - 1)$$

$$y = 1 + c_2 (x+1) + c_1 x^3$$

xx

xx

xx

التمرين الثالث:

أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة علماً بأن:

$$(3x+2x^2) y'' - 6(x+1) y' + 6y = 6$$

للمعادلة المتجانسة المناظرة حلولاً خاصة على هيئة كثيرات حدود:

$$y = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

$$y' = n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = n(n-1) x^{n-2} + \dots$$

نقوم بـ في المعادلة:

$$(3x+2x^2) x^n - 6n x^n + 6x^n = 0$$

$$2n^2 - 8n + 6 = 0$$

$$2(n^2 - 4n + 3) = 0$$

$$2(n-1)(n-3) = 0$$

$$y = x + A \quad n=1 \quad \text{كثيرة الحدود من الدرجة الأولى}$$

$$y = x^3 + Ax^2 + Bx + C \quad n=3 \quad \text{كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة}$$

لتعيين كثيرة الحدود ذات الدرجة الثالثة:

$$y = x + A$$

$$y' = 1$$

$$y'' = 0$$

نخضع في المعادلة التفاضلية لـ $A=0$

$$y_1 = x + 1$$

من أجل كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة:

$$y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

$$y' = 3x^2 + 2Ax + B$$

$$y'' = 6x + 2A$$

نخضع في المعادلة التفاضلية المتجانسة المتناظرة:

$$(3x + 2x^2)(6x + 2A) - 6(x+1)(3x^2 + 2Ax + B) + 6(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = 0$$

$$A = 0$$

$$C = B$$

$$B = 1$$

بافتراض

$$\rightarrow y_2 = x^3 + x + 1$$

$$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$y_h = A_1 (x+1) + A_2 (x^3 + x + 1)$$

الحل الخاص يعطى بالعلاقة:

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

$$w(x, x^3) = x^3(2x+3)$$

$$w_1 = \frac{-6x^2}{2x+3} \quad w_2 = \frac{6(x+1)}{x(2x+3)}$$

$$\ddot{p} = -6(x+1) \int \frac{1}{(2x+3)^2} dx + 6x^3 \int \frac{x+1}{x^3(2x+3)^2} dx$$

= 1

xx

xx

xx

xx

التمرين الثالث:

لكنه لمعنا المعادلة التفاضلية التالية

$$(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 - x$$

1- أوجد الحل العام للمعادلة المطابقة إذا علمت أن

$$y_1 = \frac{x^2+1}{2}$$

$$y_2 = \frac{x^2+4x-1}{2}$$

2- أوجد الحل العام إذا علمت أن للمعادلة حلولاً خاصة على هيئة كثيرات حدود.

الحل:

$$y = x^n + \dots$$

$$y' = nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

نقوم بتعويض المعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة:

$$(2n-2)x^n + \dots = 0$$

$$n=1 \quad \leftarrow \quad 2n-2=0 \quad \text{المطابقة عند } n=1$$

درجة كثيرة الحدود هي الدرجة الأولى

لتعيين كثيرة الحدود المنفردة نضع $y = x + A$ نضع عدداً من أجل

سيأتي منه المعادلة التفاضلية

$$y' = 1$$

$$y'' = 0$$

نفرض في المعادلة التفاضلية المتجانسة فنجد:

$$A = -\frac{1}{2} \rightarrow y_1 = x - \frac{1}{2} \quad \text{حل}$$

$$y_1 = 2x - 1 \quad \text{حل}$$

لايجاد اكل العام نتابع وفقاً ليوغين أريستراغادسكي:

المعادلة تكتب مع النمو التالي:

$$y'' + \frac{2n-1}{2n+1} y' - 2 \frac{1}{2n+1} = \frac{x^2-x}{2n+1}$$

$$\frac{-\int P(x) dx}{e} = (2n+1) e^{-x}$$

$$y_n = (2n+1) \left[C_1 \int \frac{e^{-x}}{(2n+1)} dx + C_2 \int \frac{2e^{-x}}{(2n-1)^2} dx + C_2 \right]$$

لنبحث فيه التكامل:

$$2 \int \frac{e^{-x}}{(2n-1)^2} dx$$

$$u' = -e^{-x} dx$$

$$v = -\frac{1}{2(2n-1)}$$

$$u = e^{-x} \quad \text{نفرض أن}$$

$$v' = \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$I = -\frac{e^{-x}}{2(2n-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{2n-1} dx$$

نفرض ضيق أن : $y_h = (2x-1) \left(c_0 \frac{e^{-x}}{(2x-1)} + c_1 \right)$ حيث c_0 و c_1 ثابتة معينة ومنه نأخذ :

$$y_h = c_0 e^{-x} + c_1 (2x-1)$$

ملاحظة : كان بالإمكان المتابعة وفقاً لطرق التفصيل من قبل
أن الحل الكافي e^{-x} .

الحل العام للمعادلة هو : $y = y_h + y_p$

ولكن : $y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$

$$w = \begin{vmatrix} 2x-1 & e^{-x} \\ 2 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x} (2x+1)$$

$$w_1 = -\frac{x^2-x}{2x+1} e^{-x} \quad w_2 = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2x+1}$$

$$y_p = (2x-1) \int \frac{x(x-1)}{(2x+1)^2} dx - e^{-x} \int \frac{x(x-1)(2x-1)}{(2x+1)^2} e^x dx$$

$$(2x-1) \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{8x+1}{(2x+1)^2} dx \right) - e^{-x} \int \left(\frac{x(x-1)(2x-1)}{(2x+1)^2} e^x \right) dx$$

لنوجد قيمة التكامل :

$$-\frac{1}{4} \int \frac{8x+1}{(2x+1)^2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{8x+4-3}{(2x+1)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{2(2x+1)}{(2x+1)^2} dx + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

نوجد قيمه التكامل -- نيكو به حل العام

* * * * *

تمارين : $(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$
 لاجل خاص على صيغة كثيرة حدود .

الجواب : $y = c_1(x+2) + \frac{c_2}{x} + y_p$

② $(x^2-x)y'' + (2x-3)y' - 2y = \frac{1}{x^2(2x-3)}$

لاجل خاص على صيغة كميات صفر

$$y = \frac{c_1}{x^2} + c_2(2x-3)$$

③ $(3x^3+x)y'' + 2xy' - 6xy = 4-12x^2$

$$y_1 = 2x \quad y_2 = (x+1)^2$$

$$y = c_1(x^2+1) + \frac{c_2}{x} + 2x$$

* * * * *